

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Εισαγωγή

Δημήτρης Μιχαήλ



Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεματικής
Χαροκόπειο Πανεπιστήμιο

Βιβλιογραφία

- Jon Kleinberg και Ένα Tardos, Σχεδιασμός αλγορίθμων, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
- Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou και Umesh Vazirani, Αλγόριθμοι, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2008
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein, Introduction to Algorithms, Third Edition, MIT Press, 2009
- Kurt Mehlhorn and Peter Sanders, Algorithms and Data Structures: The basic toolbox, Springer, 2008

Το μάθημα θα βασιστεί στο πρώτο βιβλίο, το οποίο και προτείνω να διαλέξετε.

Αντιπροσωπευτικά Προβλήματα

Θα δούμε σύντομα τους ορισμούς μερικών βασικών και αντιπροσωπευτικών αλγοριθμικών προβλημάτων.

- Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων
- Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων
- Διμερές Ταίριασμα
- Ανεξάρτητο Σύνολο

Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

Έχουμε ένα πόρο (π.χ αίθουσα, υπερυπολογιστή, κ.τ.λ) και αιτήματα χρήσης του πόρου αυτού της μορφής

- (s, f) – αίτημα χρήσης του πόρου από την ώρα s μέχρι την ώρα f .

Ο πόρος χρησιμοποιείται το πολύ από ένα άτομο τη φορά.

Το ζητούμενο είναι να διαλέξουμε ένα υποσύνολο των αιτημάτων, που να μην επικαλύπτονται χρονικά, και να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των αιτημάτων που θα γίνουν αποδεκτά.

Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων



Θα δούμε σύντομα πως το πρόβλημα λύνεται αποδοτικά με ένα αλγόριθμο που ανήκει στην κατηγορία των "άπληστων αλγορίθμων" (greedy algorithms).

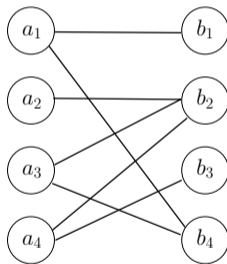
Σταθμισμένος Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων

Γενίκευση του προηγούμενου προβλήματος όπου κάθε αίτημα i με περιορισμούς (s_i, f_i) έχει μια βαρύτητα $v_i > 0$ (weight). Στόχος είναι να βρούμε ένα συμβατό υποσύνολο αιτημάτων με μέγιστη συνολική τιμή.

Η πιο γενική αυτή μορφή δεν λύνεται πλέον με "άπληστο" αλγόριθμο. Θα χρησιμοποιήσουμε μια τεχνική, το *δυναμικό προγραμματισμό* (dynamic programming), που δομεί τη βέλτιστη τιμή πάνω σε όλες τις δυνατές λύσεις με ένα συμπαγή, πινακοποιημένο τρόπο ο οποίος οδηγεί σε έναν πολύ αποδοτικό αλγόριθμο.

Διμερές Ταίριασμα

Ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι *διμερές* (bipartite) αν το σύνολο των κόμβων του V μπορεί να διαμεριστεί σε σύνολα A και B με τέτοιο τρόπο ώστε η κάθε ακμή να έχει το ένα άκρο στο A και το άλλο στο B .



Διμερές Ταίριασμα

Ένα *ταίριασμα* (matching) σε ένα γράφημα $G(V, E)$ είναι ένα σύνολο ακμών $M \subseteq E$ με την ιδιότητα ότι κάθε κόμβος εμφανίζεται το πολύ σε μια ακμή του M . Το M είναι ένα *τέλειο ταίριασμα* αν κάθε κόμβος εμφανίζεται σε μία μόνο ακμή του M .

Με ταιριάσματα μοντελοποιούμε προβλήματα ανάθεσης, για παράδειγμα ανάθεση υπολογιστικών εργασιών σε υπολογιστές όπου μια ακμή υποδηλώνει την ικανότητα του εκάστοτε υπολογιστή να διεκπεραιώσει την λειτουργία.

Διμερές Ταίριασμα

πρόβλημα Διμερούς Ταιριάσματος (Bipartite matching problem)

Δεδομένου ενός διμερούς γραφήματος G , βρείτε ένα ταίριασμα μέγιστου μεγέθους.

Θα δούμε μια κομψή και αποδοτική τεχνική για την εύρεση του μέγιστου ταιριάσματος η οποία με επαγωγικό τρόπο δομεί όλο και μεγαλύτερα ταιριάσματα.

Ανεξάρτητο Σύνολο

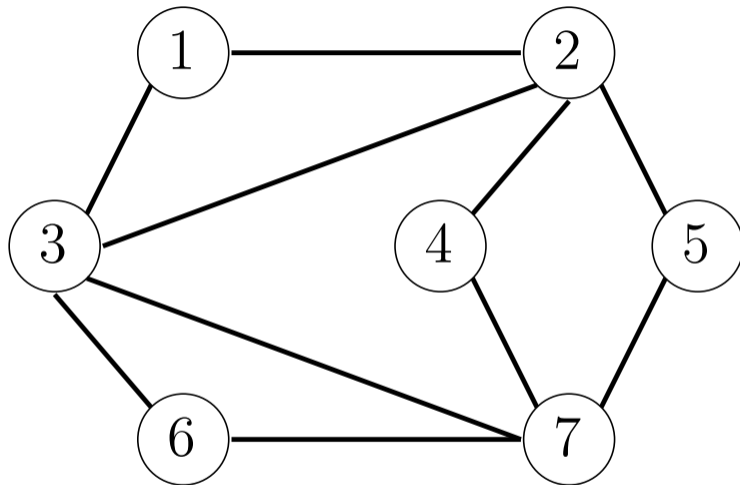
Δεδομένου ενός γραφήματος $G = (V, E)$ λέμε ότι ένα σύνολο κόμβων $S \subseteq V$ είναι *ανεξάρτητο* (independent) αν δεν υπάρχουν στο S κόμβοι που να ενώνονται ανά δύο με μια ακμή.

Το *πρόβλημα Ανεξάρτητου Συνόλου* είναι το εξής: Δεδομένου ενός γραφήματος G , βρείτε ένα ανεξάρτητο σύνολο που να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο.

Το πρόβλημα κωδικοποιεί καταστάσεις όπου θέλουμε να επιλέξουμε αντικείμενα από μια συλλογή αντικειμένων και υπάρχουν κατά ζεύγη *διενέξεις* μεταξύ ορισμένων αντικειμένων.

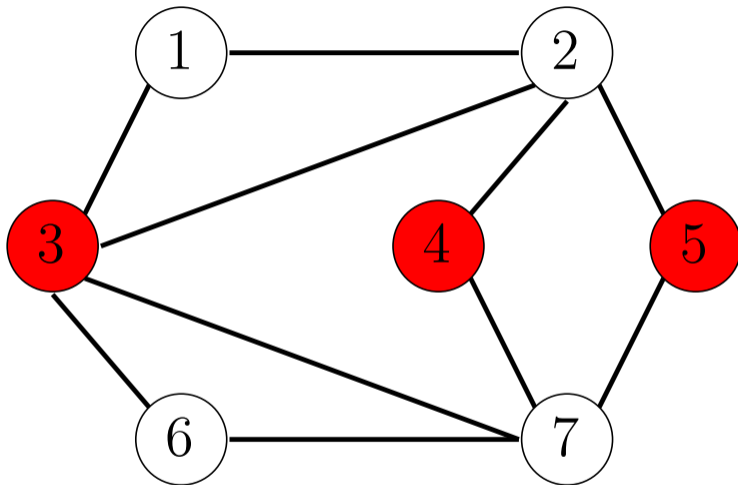
- Το πρόβλημα είναι ένα εξαιρετικά γενικό πρόβλημα.
- Τα προβλήματα χρονοπρογραμματισμού διαστημάτων και το διμερές ταίριασμα μπορούν να λυθούν ως ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος αυτού.

Ανεξάρτητο Σύνολο



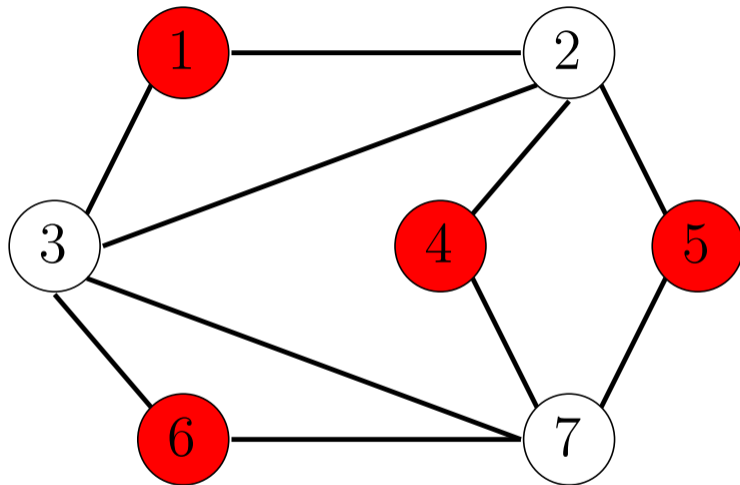
Έστω το παραπάνω γράφημα

Ανεξάρτητο Σύνολο



Το παραπάνω σύνολο είναι ανεξάρτητο με μέγεθος 3.

Ανεξάρτητο Σύνολο



Το παραπάνω σύνολο είναι μέγιστο ανεξάρτητο με μέγεθος 4

Χρονοπρογραμματισμός Διαστημάτων και Ανεξάρτητο Σύνολο

Ορίζουμε ένα γράφημα G όπου οι κόμβοι είναι τα χρονικά διαστήματα και υπάρχει ακμή μεταξύ δύο κόμβων εάν τα αντίστοιχα διαστήματα επικαλύπτονται.

Τα ανεξάρτητα σύνολα του G είναι τα συμβατά υποσύνολα των χρονικών διαστημάτων.

Εαν βρούμε ένα μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο τότε έχουμε βρει και ένα μέγιστο συμβατό υποσύνολο διαστημάτων.

Ανεξάρτητο Σύνολο

Κατάσταση Λύσης

- Προς το παρόν δεν είναι γνωστός κάποιος αποδοτικός αλγόριθμος για το πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου
- Εικάζεται πως δεν υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος
- Ο προφανής αλγόριθμος "ωμής βίας" (brute force) που ελέγχει όλα τα δυνατά υποσύνολα κόμβων και διαλέγει το μεγαλύτερο ανεξάρτητο, είναι πολύ αργός και πιθανώς το καλύτερο δυνατό.

Το πρόβλημα ανήκει σε μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων που ονομάζονται **NP-πλήρη**.

Δεν είναι γνωστός κανένας αποδοτικός αλγόριθμος για κανένα από αυτά τα προβλήματα, τα οποία είναι όλα ισοδύναμα με την έννοια πως ένας αποδοτικός αλγόριθμος για ένα από αυτά θα υπονοούσε έναν αποδοτικό αλγόριθμο για όλα.